Corrigé du Sujet du Concours Général de Physique "Minko Balkanski" 2000

Problème 1

1.1.a. $mv_0 = mv_1 + Mv_2$

1.1.b. Le choc étant élastique on a $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}$.

1.1.c. On écrit $\frac{M}{m}v_2^2 = v_0^2 - v_1^2 = (v_0+v_1)(v_0-v_1)$ puis on utilse 1.a. pour obtenir $v_2 = v_1 + v_0$. On en tire facilement:

$$v_2 = \frac{2m}{m+M}v_0, v_1 = \frac{m-M}{m+M}v_0.$$

1.1.d. Evidemment $v_2 \to 0$, $v_1 \to -v_0$.

1.2.a. Ecrivons la conservation de l'énergie: $\frac{Mv_0^2}{2} = MgH_0$ d'où

$$v_0 = \sqrt{2gH_0}.$$

1.2.b. $-v_0$ car la bille chargée étant solidement accrochée au sol, on peut la considérer de masse infinie.

1.2.c. La distance entre les billes à cet instant est $2R$ d'où:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(Q/2)^2}{2R} = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R}.$$

1.2.d. Avant le choc cette énergie vaut $U = \frac{1}{2}Q\phi$ où Q est la charge répartie sur la surface de potentiel ϕ. Comme ici $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ on en tire $U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$.

Après le choc il faut aussi prendre en compte les énergies électrostatiques "propres" de chaque distribution qui valent: $U' = 2.\frac{(Q/2)^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R}$ chacune. En somme après la rédistribution on aura la méme énergie électrostatique. En effet, les lois de l'électrostatique ne dépendent pas de la masse de l'électron, donc on peut ne pas prendre en compte la création du chaleur par effet Joule lors de la rédistribution de la charge entre les deux billes.

On pourra quand même donner une intérprétation avec la deuxième principe de la thérmodynamique: bien qu'il n'y a pas transport du chaleur l'éntropie des électrons augmente car il y a expansion dans la partie de l'éspace de phase corréspondante aux coordonées - en analogie avec la détente de Joule-Tomson d'un gaz parfait. Et pourtant, cet analyse me parraît encore assez douteaux: je suis ouvert aux propositions ...

1.2.e. Répulsives, bien sûr. On a $MgH_1 = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R} + \frac{Mv_0^2}{2}$ d'où avec 2.a.

$$H_1 = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 MgR} + H_0.$$

Le rapport $\frac{Eelect.}{Egravit.}$ decroît comme $1/H^2$, on peut s'attendre à ce que pour des hauteurs assez grandes il soit << 1.

1.2.f. Comme en 2.a. on obtient (car la bille maintenant est neutre): $v_1 = \sqrt{2gH_1} = \sqrt{2gH_0 + \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 gR}}$.

1.2.g. Chaque fois la charge restante est divisée en deux donc $Q_n = \frac{Q}{2^n}$. Elle tend vers zéro à la limite des grands n.

1.2.h. On procède par analogie avec 2.c. pour obtenir:$H_n = \frac{Q_n^2}{8\pi\epsilon_0 MgR} + H_{n-1}$, soit:

$$H_n = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 MgR}(\frac{1}{4})^n + H_{n-1}.$$

1.2.j. Il s'agit de sommer une simple suite géometrique de raison $\frac{1}{4}$, ainsi (on somme à partir de $n = 1$!): $H_n = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 MgR}(\frac{1-(\frac{1}{4})^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} - 1) + H_0$, ce qui donne:

$$H_n = \frac{Q^2}{24\pi\epsilon_0 MgR}(1 - (\frac{1}{4})^n) + H_0.$$

Dans la limite $n \to \infty$ on obtient:

$$H_{max} = \frac{Q^2}{24\pi\epsilon_0 MgR} + H_0.$$

1.2.k. Numériquement on obtient $Q = 0.18\mu C$.

1.3.a. Sachant que $v_n^2 = 2gH_n$ on obtient immédiatement:

$$v_n^2 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 MR}(\frac{1}{4})^n + v_{n-1}^2.$$

1.3.b. Exactement comme en 2.h. on obtient:

$$v_n^2 = \frac{Q^2}{12\pi\epsilon_0 MR}(1 - (\frac{1}{4})^n) + v_0^2,$$

puis la limite est:

$$v_{max}^2 = \frac{12Q^2}{\pi\epsilon_0 MR},$$

soit

$$v_{max} \approx Q\sqrt{\frac{12}{\pi\epsilon_0 MR}}.$$

Ces résultats sont universels, en effet il traduissent la conversion de l'énergie élecrostatique en énergie cinétique de la bille via l'énergie gravitationnelle; comme l'énergie gravitationnelle est entièrement convertie, sa forme mathématique explicite n'intervient pas dans les calculs.

1.3.c. Numériquement on trouve $Q = 8.6.10^{-4}C$.

En voici quelques raisons pour lesquelles cette méthode de propulsion ne peut jamais être mise en pratique:

-les charges électriques nécessaires sont trop grandes,

-on ne peut pas placer l'électrode de décharge à n'importe quelle hauteur,

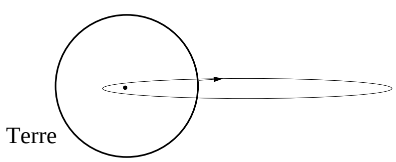
-les chocs ne sont jamais parfaitement élastiques,

-le temps de propulsion est déraisonnablement long puisque la trajectoire effectivement parcourue est très longue,

-il faut prendre en compte le frottement fluide de l'air et sa conductivité électrique,

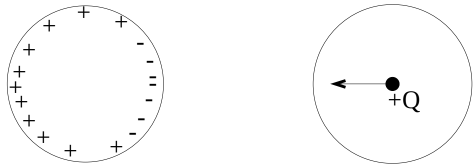
-par la 1ère loi de Kepler la bille va retomber sur la Terre car sa trajectoire sera une ellipse (la faible ellipticité provient de la vitesse de rotation de la Terre autour son axe qui est maximale à l'équateur et vaut $\approx 0,5kms^{-1}$) très aplatie (voir la figure),

-on a oublié le champ électrostatique de la Terre,

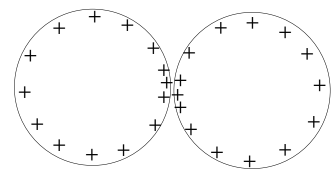


-un satellite utile contient de l'électronique, qui ne fait pas bon ménage avec l'électricité statique.

-on n'a pas pris en compte les phenomenes d'induction électrostatique, ces qui fait que les calculs de l'énergie électrostatique corréspondant à l'intéraction sont légèrement faux. Ces phenomene intervient, d'une part par un dipôle induit à l'approche de la bille chargée vers la bille non-chargée:



D'autre part au moment quand les deux billes se touchent la distributions des charges est differente de celle dans l'énonce (cetre de charge dans les deux bille décalés):



-on ne sait pas trop comment préndre en copmte les pertes par effet Joule lor de la rédistribution des charges pour les conducteurs réels qui ne sont pas parfait ...

Problème 2

2.1.a. Pour un gaz parfait quelconque $pV = nRT$,ici

$p_1V_1 = RT_0$ et $p_2V_2 = RT_0$.

2.1.b. La force s'exprime algébriquement $F = S(p_1 - p_2)$. La condition d'équilibre est $F = 0$ soit $p_1 = p_2 = p_0$. $p_1 = p_2$ implique $V_1 = V_2$ donc le piston est au milieu.

2.2.a. Evidemment $p_1^{'}V_1^{'\gamma} = p_0V_0^{\gamma}$.

2.2.b. Comme on a $p_0V_0 = RT_0$ et $p_2^{'}V_2^{'} = RT$ on en déduit immédiatement $p_2^{'}V_2^{'} = \frac{T}{T_0}p_0V_0$.

2.2.c On a $V_1^{'} = V_0 + S\Delta x$ et $V_2^{'} = V_0 - S\Delta x$. Pour $p_1^{'}$ on obtient:

$p_1^{'} = p_0(\frac{V_0}{V_1^{'}})^{\gamma} = p_0(\frac{V_0}{V_0+S\Delta x})^{\gamma} = p_0(1 + \frac{S\Delta x}{V_0})^{-\gamma}$, soit avec la formule approchée:$p_1^{'} = p_0(1 - \gamma\frac{S\Delta x}{V_0})$.

2.2.d. On a $p_2^{'} = \frac{T}{T_0}p_0(\frac{V_0}{V_0-S\Delta x}) = p_0\frac{T}{T_0}(1 - \frac{S\Delta x}{V_0})^{-1} = p_0\frac{T}{T_0}(1 + \frac{S\Delta x}{V_0})$.

Maintenant la condition d'équilibre donne $p_1^{'} = p_2^{'}$ d'où:

$1 - \gamma\frac{S\Delta x}{V_0} = \frac{T}{T_0}(1 + \frac{S\Delta x}{V_0})$ d'où (avec $V_0 = SL/2$):

$\Delta x = \frac{L}{2}\frac{1-\frac{T}{T_0}}{\gamma+\frac{T}{T_0}}$.

2.2.e. On a $\Delta x < 0$ car $\frac{T}{T_0} > 1$. En effet on a $V_2^{'} \approx V_0$, donc on peut considérer que $p_2^{'}$ est proportionelle à T au cours de la transformation. Comme T augmente $p_2^{'}$ augmente aussi et pousse le piston dans le sens négatif de l'axe Ox.

2.2.f. Numériquement $\Delta x = -3,5cm$. Or $0,035$ est assez petit devant $2,5$ donc la condition $\Delta x << L/2$ est assez bien vérifiée. Pour que cette condition soit violée, il faut que $\frac{T}{T_0} \approx 2$ ce qui n'est pas possible pour les radiateurs de tous les jours.

2.2.g. Avec la formule de l'énoncé on obtient, comme le centre de gravité x_{G2} du wagon seul reste immobile:

$\Delta x_{G|R} = \frac{m\Delta x_{2G}+M\Delta x_{1G}}{m+M} = \frac{m}{m+M}\Delta x = \frac{m}{m+M}\frac{L}{2}\frac{1-\frac{T}{T_0}}{\gamma+\frac{T}{T_0}}$.

Or, la force agissant sur le piston est interne pour le système considéré, comme il n'y a pas des forces de frottements entre les roues et les rails la résultante des forces extérieures agissant sur le wagon est égale à 0. Donc G ne peut pas bouger par rapport au sol, comme G recule dans R le wagon doit avancer par rapport au sol, d'où $\Delta x_{G|sol} = -\Delta x_{G|R}$.

Numériquement on obtient $\Delta x_{G|sol} = 5,8 cm \approx 6 cm$

2.3. Comme l'une des parois communiquant avec l'air est un conducteur parfait, la température du premier compartiment reste égale à T_0. On peut donc écrire $p_1^{'} V_1^{'} = const$ ce qui revient à poser $\gamma = 1$ dans tous les calculs qu'on vient d'effectuer. On aura alors:

$$\Delta x_{G|sol} = \frac{m}{m+M} \frac{L}{2} \frac{\frac{T}{T_0} - 1}{\frac{T}{T_0} + 1}.$$